

# Análise quantitativa do crescimento populacional da cidade de Seropédica-RJ sob a influência dos estudantes da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Quantitative analysis of population growth Seropédica-RJ city under the influence of students at the Federal Rural University of Rio de Janeiro

Welber Faustino da Silva\*<sup>†</sup>, Orlando dos Santos Pereira<sup>‡</sup>

## Resumo

Neste trabalho pretendeu-se analisar o quanto os estudantes da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), que são moradores da cidade de Seropédica, influenciam quantitativamente e economicamente no crescimento da população local, uma vez que a UFRRJ tem sua sede localizada nas proximidades da cidade de Seropédica. Para isso, foi aplicado um modelo de crescimento definido por um sistema de equações diferenciais, devido a Lotka-Volterra, que envolve a interação entre duas espécies, neste caso a população da cidade e a população de estudantes, sabendo que o número de moradias desocupadas é dependente da procura pelos estudantes para aluguéis e estas moradias ocupadas influenciam também a oferta e a construção de novos empreendimentos na cidade.

**Palavras-Chave:** Crescimento Populacional; Modelagem Matemática.

## Abstract

This paper intended to analyze how the students of the Federal Rural University of Rio de Janeiro (UFRRJ), who are also residents of the city of Seropédica, quantitatively influence the economic growth of the local population, since UFRRJ has its head office located near Seropédica City. For this, a growth model was applied defined by a system of differential equations due to Lotka-Volterra. This model involves the iteration between two species, in this case the city's population in iteration with the student population, knowing that the number of unoccupied dwellings is dependent on the demand for students to rent and that occupied housing also influences the supply and construction of new projects in the city.

**Keywords:** Population growth; Mathematical Modeling.

**Como citar esse artigo.** Silva WF, Pereira OS. Análise quantitativa do crescimento populacional da cidade de Seropédica-RJ sob a influência dos estudantes da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Revista Eletrônica Teccen. 2016 Jan./Jun.; 09 (1): 03-08.

## Introdução

Muitas das maiores descobertas em Matemática estão ligadas às Equações Diferenciais Ordinárias. De um modo geral, a modelagem de fenômenos (estudos populacionais, problemas físicos, fenômenos químicos, biológicos emeteorológicos, etc.) dependem de forma direta de uma boa compreensão das propriedades locais, globais e assintóticas de uma classe de equações diferenciais, de acordo com o problema em questão. Neste sentido, o estudo de crescimento populacional utilizando este conceito é muito frequente e, desde modo, este trabalho analisou o crescimento da população de Seropédica influenciada pelo morador desta cidade que seja também estudante da UFRRJ, localizada a 2 Km do centro desta cidade.

A cidade de Seropédica está localizada na baixada Fluminense do Estado do Rio de Janeiro, ocupando uma

área de aproximadamente 283.762 km<sup>2</sup>, com população estimada em 78.183 mil habitantes, pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2011). O município possui pouca autonomia econômica, sendo sua principal atividade a extração de areia para uso na construção civil, praticada por várias empresas mineradoras da região. A economia depende também da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), em torno da qual gira boa parte da economia do município, proveniente das verbas federais e da renda da comunidade universitária (PortalSeropédica, n.d.).

Neste trabalho, o objetivo foi analisar o quanto os alunos da UFRRJ, moradores da cidade de Seropédica, influenciam quantitativamente e economicamente na população de Seropédica como um todo. Foram considerados aqueles alunos que residiam e pagavam aluguel em Seropédica, no período de 2000 a 2010, período em que os dados censitários da cidade estavam

Afiliação dos autores: <sup>†</sup> Universidade de Brasília, ICE/MAT, Brasília-DF, Brasil.

<sup>‡</sup> Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, ICE/DEMAT, Seropédica-RJ, Brasil.

\* Endereço para correspondência: Campus Universitário Darcy Ribeiro, Brasília - DF - CEP: 70910-900.  
E-mail: welberfaustino@hotmail.com

disponíveis no sítio do IBGE e na qual a universidade se encontrava em período de expansão. Para isso, foi aplicado um modelo de crescimento definido por um sistema de equações diferenciais, devido a Lotka-Volterra, que envolve a população da cidade em interação com a população de estudantes. É importante destacar que, o número de moradias desocupadas depende da procura dos estudantes para aluguéis, e estas influenciam também a oferta e construção de novos empreendimentos na cidade.

Inicialmente foram estudados os conceitos básicos de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) como existência e unicidade de solução de um problema de valor inicial e suas aplicações nos problemas diários, mais especificamente foi estudado sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Em sequência na pesquisa, foram calculadas as soluções aproximadas por métodos numéricos para o caso, que é um sistema de EDO não-linear. Foram feitas ainda estimativas dos parâmetros envolvidos no modelo com base em pesquisa de dados do IBGE e dados cedidos pela administração da UFRRJ.

Este trabalho foi inspirado no trabalho de Amorim *et al.* (2010), que fez um estudo de um modelo similar, porém com competição entre espécies marinhas, um tipo de modelo clássico em estudos de dinâmica populacional, como pode ser visto, por exemplo, em Edelstein-Keshet (1987) e Murray (1993).

## Materiais e Métodos

Primeiramente, foi considerado que a população de estudantes da UFRRJ que moram em Seropédica tende a crescer, o que de fato vem acontecendo, como mostrado no trabalho de Carvalho & Pereira (2010). Supõe-se ainda que não haja fator como meio de subsistência que os impeça de crescer quantitativamente, a não ser a própria população local e residente da cidade que detêm a posse das moradias e, portanto, tem um certo "controle" desta oferta de moradias para os estudantes. Além disso, considerou-se que devido a poucas opções de geração de renda na cidade, os moradores dependem quase que exclusivamente dos aluguéis para seu sustento.

Assim, supondo inicialmente que haja sempre espaço vazio (moradias) para os estudantes residirem em Seropédica, então considerando  $X(t)$  como uma variável para representar a população total de estudantes em um tempo  $t$ , tem-se que  $X(t)$  satisfaz o modelo matemático devido a Malthus:

$$\frac{dX}{dt} = aX(t), a > 0 \text{ é uma constante} \quad (1)$$

Este modelo de crescimento clássico considera que o crescimento de uma espécie é apenas função do tempo e que a taxa de crescimento ou decrescimento da espécie é proporcional a quantidade da espécie ainda presente.

No entanto, baseado no modelo de crescimento com interação entre duas espécies de Lotka-Volterra, considerando  $Y(t)$  a variável para representar a população residente de Seropédica, então esta população afeta o crescimento dos moradores estudantes, portanto supõe-se que a taxa de crescimento da população de estudantes em Seropédica diminui linearmente quando a população de Seropédica aumenta, considerando que em um dado período o número de moradias vazias é constante. Assim o modelo (1) torna-se:

$$\frac{dX}{dt} = (\alpha - bY(t)) \cdot X(t), \alpha > 0, b > 0 \quad (2)$$

ou seja, no modelo (1), considerou-se:

$$a = \alpha - bY(t)$$

Note que  $a$  é variável com tempo e decrescente com  $Y$ .

Por outro lado, supõe-se que a população local de Seropédica depende financeiramente dos estudantes de tal modo que sem os estudantes inquilinos, muitos residentes de Seropédica não sobreviveriam na cidade e, portanto, sem os estudantes, a população local tenderia a decrescer de acordo com a equação:

$$\frac{dY}{dt} = -cY(t), c > 0 \text{ é constante} \quad (3)$$

Porém, a presença dos estudantes, que é real, modifica a situação acima e considerou-se que a taxa de crescimento da população de Seropédica aumenta linearmente quando a população de estudantes aumenta, assim o modelo (3) torna-se:

$$\frac{dY}{dt} = (-\beta + dX(t)) \cdot Y(t), \beta > 0, d > 0 \quad (4)$$

Note que neste caso ocorre o inverso do modelo (2), ou seja, a taxa de variação da população de Seropédica é variável e cresce com aumento dos estudantes.

Finalmente, juntando o modelo (2) e (4) obtém-se um sistema de equações diferenciais de primeira ordem não-linear, que foi o modelo adotado nesta pesquisa.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \alpha X - bXY \\ \frac{dY}{dt} = -\beta Y + dXY \end{cases} \quad (5)$$

Para efetuar a estimativa dos quatro parâmetros do modelo (5), foram estimados primeiramente os parâmetros da parte linear. Para isso, foram utilizados dados da Pró-Reitoria de Graduação da UFRRJ que permitiu determinar o número de estudantes residentes em Seropédica em cada ano, listados na Tabela 1.

**Tabela 1.** População de Seropédica e de estudantes de 2000 a 2010.

Ano	População de Seropédica	Estudantes Moradores de Seropédica
2000	65260	5336
2004	71490	4994
2007	72466	4820
2009	78819	5414
2010	78186	6077

Fonte: IBGE e Pró-Reitoria de Graduação.

Para estimar os parâmetros  $b$  e  $d$ , primeiro utilizou-se o sistema (5) para obter:

$$b = \frac{\alpha X - \frac{dX}{dt}}{XY}$$

$$d = \frac{\beta Y + \frac{dY}{dt}}{XY}$$

Os valores de  $X(t)$  e  $Y(t)$  necessários para obtenção de  $b$  e  $d$  foram obtidos pela média aritmética dos dados de cada uma das populações, a população de estudantes e a dos residentes de Seropédica. Para estimar os termos com as derivadas, foi utilizado o método da diferença central, caracterizado pela aproximação por série de Taylor, isto é, fazendo a diferença  $X(t+h)-X(t-h)$  e  $Y(t+h)-Y(t-h)$  no desenvolvimento de Taylor, onde  $h$  está representado pelo período de tempo em anos. Mais precisamente, a aproximação é dada por:

$$\frac{X(t+h) - X(t-h)}{2h} = \frac{dX}{dt} + O(h^2)$$

$$\frac{Y(t+h) - Y(t-h)}{2h} = \frac{dY}{dt} + O(h^2)$$

onde  $O(h^2)$  é o erro na aproximação.

Com os valores das derivadas ajustados, foram calculados  $b$  e  $d$  para cada ano  $i$ , obtendo-se assim as expressões de  $b$  e  $d$  da forma:

$$b(i) = \frac{\alpha X(i) - \frac{dX}{dt}(i)}{X(i)Y(i)}$$

$$d(i) = \frac{\beta Y(i) + \frac{dY}{dt}(i)}{X(i)Y(i)}$$

Para o ajuste de  $b$  e  $d$ , foram traçados os gráficos de  $b$  versus  $t$  e de  $d$  versus  $t$ , cuja curva de melhor ajuste via método dos mínimos quadrados foi obtida como uma função do segundo grau. Com os parâmetros de cada curva estimados, calculou-se  $b$  e  $d$  usando uma média integral, isto é, calculou-se a área sob o gráfico da curva e dividiu-se pelo período de tempo considerado. Os valores de  $b$  e  $d$  são dados na Tabela 2:

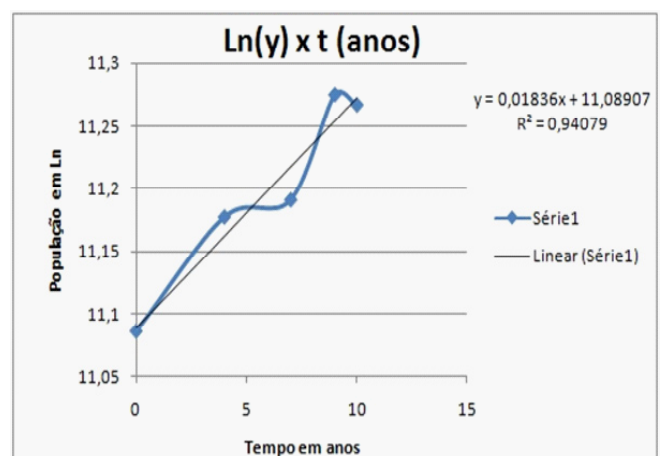
**Tabela 2.** Valores médios de  $b$  e  $d$ .

Parâmetros	Valores
$b$	0,000000081387977000
$d$	0,000005844683388

Fonte: O autor.

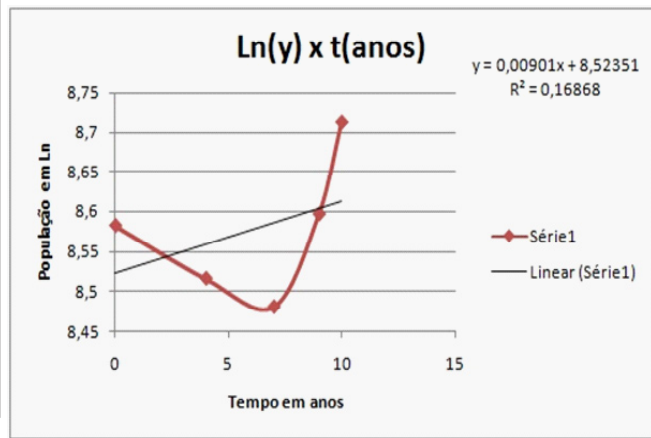
## Resultados e Discussões

Na determinação dos parâmetros de crescimento e decrescimento no caso linear, implementamos o modelo de Malthus a partir dos dados da Tabela 1 e plotou-se os gráficos para cada população, a de Seropédica e a de estudantes, como mostrados na Figura 1 (População de Seropédica) e na Figura 2 (População de estudantes).



**Figura 1.** Estimativa População de Seropédica

Fonte: O autor



**Figura 2.** Estimativa População de Estudantes  
Fonte: O autor

Os parâmetros foram então obtidos a partir da regressão linear, cujos valores são mostrados na Tabela 3.

**Tabela 3.** Valores dos parâmetros no modelo de Malthus

Valores	Pop. Seropédica	Pop. Estudantes
Parâmetros	0,01836	0,00901
R <sup>2</sup>	0,940	0,168

Fonte: O autor.

O valor baixo de R<sup>2</sup> obtido na estimativa da população de Estudantes não foi considerado como preocupante na análise do resultado final, uma vez que os parâmetros b e d eram o de maior interesse na iteração entre as populações.

De posse de todos os parâmetros, segue do sistema 5 o modelo ajustado:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = 0,00901X - 0,000000081387977000XY \\ \frac{dY}{dt} = -0,01836Y + 0,000005844683388XY \end{cases} \quad (6)$$

Os pontos onde as derivadas de X e de Y são nulas, são chamados de pontos críticos do sistema (6). Os pontos críticos correspondem a soluções de equilíbrio, ou seja, soluções para as quais X(t) e Y(t) são constantes, para tais soluções o sistema de equações descrito por X e Y não varia com o tempo; ele permanece em seu estado original para sempre.

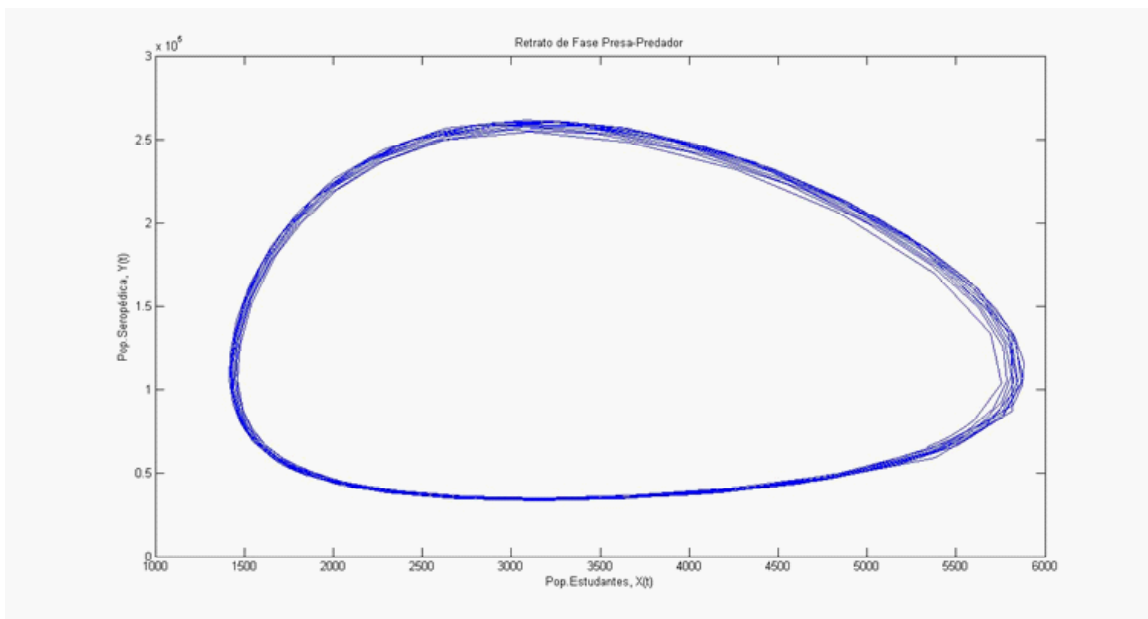
Os pontos críticos do sistema (6) são as soluções das equações algébricas:

$$X(0,00901 - 0,000000081387977000Y) = 0$$

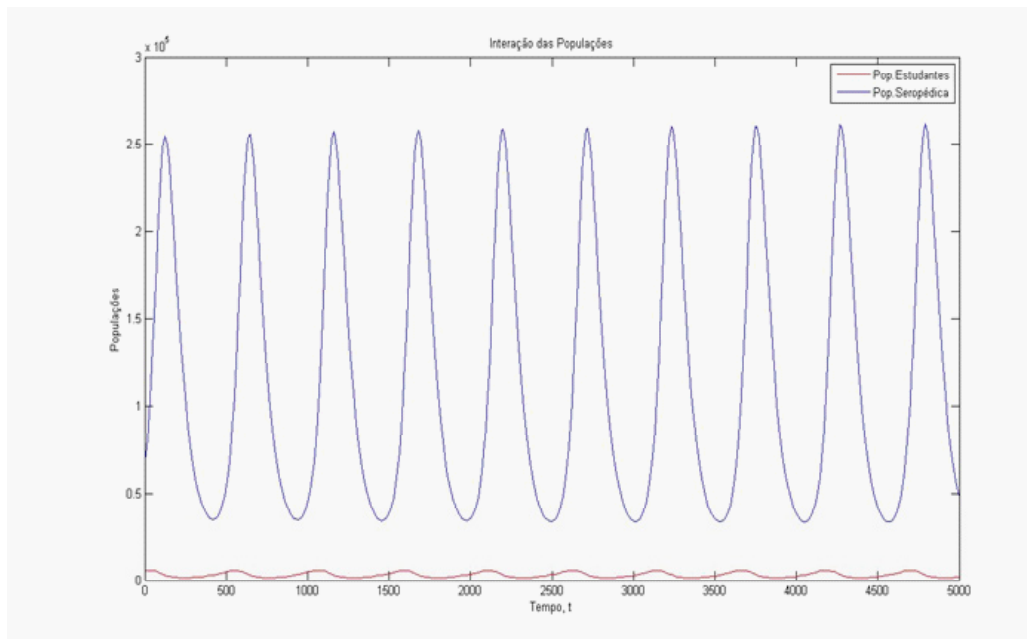
$$Y(-0,01836 + 0,000005844683388X) = 0$$

Calculando-se X e Y, obtém-se os pontos (0, 0) e (3.141, 110.704). O ponto crítico (0,0) é classificado como uma *sela instável*, já o ponto (3.141,110.704) é um *centro estável*.

Usando o software Matlab, construiu-se o retrato de fase do sistema (6), ou seja, o retrato de como varia o campo de vetores tangentes no plano cartesiano XY.



**Figura 3.** Retrato de fase no plano XY.  
Fonte: O autor



**Figura 4.** Comparação do crescimento das populações no mesmo tempo.  
Fonte: O autor

Usando ainda o Matlab, obteve-se o gráfico que mostra a variação das populações em relação ao tempo para o sistema (6).

Pelas Figuras 3 e 4 observa-se que as populações se comportam de forma periódica, isto é, a oscilação da população de Seropédica ocorre depois da oscilação da população dos estudantes moradores de Seropédica. Começando em um estado no qual ambas as populações, são relativamente pequenas, primeiro vemos um aumento na população de estudantes, já que há poucos moradores de Seropédica ou estão estabilizados, e, portanto, a espaço vazio (moradias) para os estudantes residirem em Seropédica. Então a população de Seropédica, com o aumento de estudantes se beneficia e também cresce. Isso aumenta a procura por moradias, logo a população de estudantes residentes na cidade tende a diminuir. Finalmente, com a diminuição dos estudantes, a população de Seropédica também diminui, pois dependem financeiramente dos estudantes, portanto muitos moradores já não poderiam mais sobreviver na cidade, e o sistema volta ao seu estado original.

## Considerações Finais

Embora o ajuste na curva da população dos estudantes moradores de Seropédica feito pelo modelo clássico de Malthus tenha mais erro do que o da população de Seropédica vemos que o modelo proposto de Lotka-Volterra ajustou-se bem aos quatro parâmetros obtidos. Com a ausência dos estudantes na cidade de Seropédica, a população local seria prejudicada financeiramente e com isso, muitos moradores sairiam da cidade por falta de renda.

Ainda pretende-se estudar a interação da

população de Seropédica ao acrescentarmos ao modelo, os dados da população de estudantes residentes da UFRRJ. Tendo em vista que as duas populações na ausência da outra, não crescem ou decrescem exponencialmente para um tempo grande, poder-se-á inserir ao modelo proposto, o modelo logístico, onde teremos limitações de crescimento e decrescimento para ambas populações.

Outra questão importante a ser considerada *a posteriori* é a taxa de crescimento no sistema considerado, em cada caso considerou-se que a taxa cresce ou decresce linearmente com a outra, mas esta suposição ainda que muito coerente com as estatísticas e referências adotadas, pode ser alterada e pode-se obter outros resultados a fim de comparação com este analisado.

## Referências

- Alves, J. E.D. A polêmica Malthus versus Condorcet reavaliada à luz da transição demográfica, Texto para discussão da Escola Nacional de Ciências Estatísticas}, ENCE/IBGE, nº4, Rio de Janeiro, 2002.
- Amorin, M. et al. Modelagem da Dinâmica Populacional de *Centrocercas Vulatum* e *Ulva Fasciata* na ilha de Marambaia, baía de Sepetiba, RJ. XXXIII CNMAC, Águas de Lindoia, São Paulo, 2010.
- Boyce, W., DiPrima, R. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno”; L.T.C, 7ª Edição, 2002
- Carvalho, M., Pereira, O., Análise do Crescimento Populacional da Cidade de Seropédica como Aplicação de Equações Diferenciais. Anais da Jic UFRRJ, Seropédica, 2010.
- Cunha, M. Cristina C. Métodos Numéricos, Campinas, SP. Editora Unicamp, 2000.
- Edlshain-Keshet, L. *Mathematical Models In Biology*”, Birkhauser Mathematics Series, Mc Graw Hill, Inc., 1987.
- Figueiredo, Djairo G. Neves, A.F. *Equações Diferenciais Aplicadas*”;

Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2002.

Murray, J.D. Mathematical Biology. Biomathematics Text<sup>o</sup>, 2nd edition, Springer -Verlag, 1993.

Ruggiero, M.A.G. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais, 2ed, São Paulo:Pearson, 1996.

[www.portalsepedica.com](http://www.portalsepedica.com), acessado em 17/06/2012