O uso de integradores numéricos no estudo de encontros próximos

Érica Cristina Nogueira[1]

[1] Observatório Nacional – MCT - erica.nogueira@on.br

Resumo. *O estudo da dinâmica do Sistema Solar necessita de integradores numéricos que reproduzam muito bem suas características dinâmicas durante um intervalo muito grande de tempo. Para o estudo de muitos problemas da dinâmica do Sistema Solar são usados integradores simpléticos, por serem muito mais rápidos do que outros integradores comuns. No entanto, estes integradores não são adequados para estudos de encontros próximos por não conseguirem manter sua precisão durante o cálculo desses encontros. Uma solução alternativa para este tipo de problema são os integradores híbridos pois eles podem resolver a questão dos encontros próximos sem perder muito da velocidade de integração. Neste trabalho, será feito uma revisão sobre a teoria dos integradores híbridos, destacando o uso do integrador MERCURY no estudo de problemas que envolvam encontros próximos.*

Palavras-Chave: integradores numéricos para N-corpos; mecânica celeste, encontros próximos, Sistema Solar

1 Introdução

O estudo da dinâmica do Sistema Solar necessita de integradores numéricos que reproduzam muito bem suas características dinâmicas durante um intervalo muito grande de tempo. Para o estudo de muitos problemas da dinâmica do Sistema Solar são usados integradores simpléticos, por serem muito mais rápidos do que outros integradores comuns. No entanto, estes integradores não são adequados para estudos de encontros próximos por não conseguirem manter sua precisão durante o cálculo desses encontros. Uma solução alternativa para este tipo de problema são os integradores híbridos pois eles podem resolver a questão dos encontros próximos sem perder muito da velocidade de integração.

Neste artigo, será feito uma revisão sobre a teoria dos integradores híbridos, destacando o uso do integrador MERCURY [Chambers 1999] no estudo de problemas que envolvam encontros próximos.

2 Integradores simpléticos

Os integradores simpléticos são ferramentas muito úteis para a modelagem aproximada de sistemas dinâmicos por intervalos de tempo muito longos. Eles se comportam como simuladores que conseguem reproduzir muito bem as características dinâmicas globais de um dado sistema: pontos de equilíbrio, regiões de regularidade e caoticidade no espaço de fase, escalas de tempo de difusão e de instabilidade global, etc. é possível mostrar que eles conservam exatamente as integrais primeiras vinculadas às simetrias do problema, como o momento angular e o movimento do centro de massa. A energia é conservada apenas em média e não há o efeito secular de outros integradores. Os integradores simpléticos possuem duas vantagens sobre outros integradores de N-corpos: eles não acumulam os erros do cálculo da energia e são muito mais rápidos do que os outros algoritmos convencionais. A alta eficiência vem do fato de que a força dominante em cada objeto pode ser integrada analiticamente, deixando somente as pequenas perturbações com vínculos para o tamanho do passo de integração. Isto significa que um integrador simplético precisa calcular as forças que atuam num corpo menos vezes do que um integrador convencional para um mesmo nível de precisão.

Por serem tão eficientes, estes integradores são muito usados no estudo de muitos problemas da dinâmica do Sistema Solar. No entanto eles não são adequados para o estudo de encontros próximos por não conseguirem manter sua precisão durante o cálculo desses encontros. O ideal seria que o passo diminuísse durante os encontros para garantir a precisão durante toda a integração. Entretanto esta variação no passo de integração induz um erro em cada variação. Um estudo mais detalhado sobre integradores simpléticos pode ser encontrado em Yoshida (1993) e Sanz-Serna (1991).

3 Integradores híbridos

Uma solução alternativa para este tipo de problema são os integradores híbridos eles possuem características tanto dos integradores simpléticos quanto dos convencionais, isto é, eles podem resolver a questão da precisão dos encontros próximos sem perder muito da velocidade na integração.

A técnica consiste em dividir o problema em duas partes: quando os corpos estão distantes, o algoritmo tem a velocidade do método MVS (*mixed variable symplectic*) e sempre que dois corpos sofrem um encontro mútuo, o passo de integração para os corpos que têm encontros, é subdividido sucessivamente até a precisão desejada.

O truque dos integradores híbridos consiste em dividir a hamiltoniana em partes, onde cada parte pode ser resolvida independentemente da outra e as soluções aplicadas uma de cada vez, de tal maneira que se aproximam da solução do problema. A hamiltoniana que é a soma da energia cinética e potencial de todos os corpos é escrita como:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} - G\sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{j+1}^{N} \frac{m_j}{r_{ij}} \tag{1}$$

No caso do Sistema Solar, onde a força dominante é devido à gravidade do Sol, a hamiltoniana do sistema pode ser escrita em função das órbitas dos corpos ao redor do Sol (H_A), das perturbações que um corpo faz sobre o outro (H_B) e da energia cinética do Sol (H_C):

$$H_A = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m_i} - \frac{Gm_* m_i}{r_{i*}} \right) \tag{2}$$

$$H_B = -G\sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i+1}^{N} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \tag{3}$$

$$H_C = \frac{1}{2m_*} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p} \right)^2 \tag{4}$$

Onde: m_i e p_i são a massa e o momento do corpo i; r_{ij} é a distância entre os corpos i e j;

N é o número de objetos menos o Sol e as quantidades com o índice * dizem respeito ao Sol. O erro, em cada passo é da ordem de $O(\xi\tau^3)$, onde $\xi = \sum m_i / m_*$ e τ é o passo de integração. Num sistema de coordenadas mistas, isto é, coordenadas heliocêntricas e velocidades baricêntricas, temos que $H_A >> H_B$ e $H_A >> H_C$ para todos os corpos orbitando ao redor do Sol.

Quando ocorre um encontro próximo entre dois corpos, temos que H_B fica muito grande. Este termo é então transferido para H_A e o problema resolvido numericamente, já que o problema, que antes era um problema de dois corpos apenas, passa a ser um problema de três corpos. Esta transferência de H_B para H_A é feita usando as equações (5) e (6):

$$H_A = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2m_i} - G\frac{m_* m_i}{r_{i*}}\right) + - G\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{m_i m_j}{r_{ij}}\left[1 - k(r_{ij})\right] \tag{5}$$

$$H_B = -G\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{m_i m_j}{r_{ij}}k(r_{ij}) \tag{6}$$

Se r_{ij} é muito grande $k \to 1$ e se r_{ij} é muito pequeno $k \to 0$ que garante $H_B << H_A$ durante os encontros próximos. Se não ocorrer nenhum encontro próximo, H_A pode ser resolvido analiticamente. Resumindo, o integrador híbrido segue os seguintes passos gerais:

- **i)** Cada corpo é perturbado pelos outros corpos do sistema. Esta perturbação é da ordem de $k(r_{ij})$ durante τ/2. O Sol é considerado como corpo central do problema.
- ii) O momento é fixo e cada corpo muda sua posição numa quantidade $\tau\sum_i \vec{p}_i/2m_*$
- **iii)** Os corpos que não têm encontros próximos se movem numa órbita kepleriana ao redor do Sol num tempo τ. Para corpos que têm encontros próximos, os termos são da ordem de (1-k) e são integrados numericamente por um tempo τ.
- iv) como ii
- v) como i

3.1. O pacote MERCURY

Partindo deste princípio, Chambers desenvolveu um integrador híbrido para N-corpos chamado MERCURY [Chambers, 1999]. O integrador Mercury foi desenvolvido para calcular a evolução orbital de objetos movendo-se no campo gravitacional de um corpo central muito massivo quando comparado ao tamanho dos outros objetos. Por exemplo, o Mercury pode ser usado para simular o movimento dos planetas, asteróides e cometas ao redor do Sol ou um sistema de satélites orbitando um planeta ou ainda um sistema planetário orbitando uma outra estrela.

Este pacote foi desenvolvido usando a linguagem FORTRAN e inclui vários algoritmos para o cálculo de N-corpos:

- *Integrador Simplético de variáveis mistas (MVS):* são integradores muito rápidos, no entanto não consideram encontros próximos.
- *Bulisch-Stoer (geral)*: é um integrador lento, mas muito preciso. Pode ser usado quando todos os outros falham ou para testar se os outros algoritmos são apropriados para o estudo em questão.
- *Bulisch-Stoer2*: este integrador é muito mais rápido do que o Bulisch-Stoer geral, mas ele só considera sistemas em que a aceleração é função somente da posição, como por exemplo, sistemas newtonianos. Ele não considera a relatividade geral.
- *Radau (Everhart's RA15)*: este integrador é cerca de 2-3 vezes mais rápido do que o Bulisch-Stoer geral. Ele é muito preciso exceto para encontros próximos ou órbitas muito excêntricas.
- *Integrador híbrido e simplético*: este integrador é muito rápido com uma boa precisão. Ele calcula encontros próximos.

O Mercury é um programa de integração básico. Ele contém todas as sub-rotinas necessárias para usar qualquer um dos algoritmos descritos acima. Além dessas rotinas, alguns arquivos são necessários para que o programa funcione:

i Um arquivo contendo as informações iniciais dos corpos massivos que serão integrados (por exemplo os planetas do Sistema Solar), exceto do corpo central. Um corpo massivo é definido como um corpo que perturba todos os outros objetos durante a integração;

ii Um arquivo contendo as informações iniciais dos corpos que perturbam os corpos massivos durante a integração, porém não entre si. Exemplos desses corpos são: asteróides, satélites, cometas. Eventualmente estes corpos podem ser considerados com massa igual a zero.

iii Um arquivo contendo as informações que serão usadas pelo integrador (por exemplo passo de integração, tempo de integração, tipo de integrador a ser usado...).

iv Um arquivo contendo as informações sobre posição e velocidade dos objetos durante a integração. Estes dados são salvos periodicamente.

v Um arquivo contendo os detalhes dos encontros próximos ocorridos durante a integração.

vi Um arquivo contendo um resumo dos parâmetros de integração usados pelo integrador e uma lista dos eventos ocorridos: ejeções, colisões...

vii Um arquivo contendo as informações, atualizadas periodicamente, dos corpos massivos. Essas informações poderão ser usadas caso seja necessário continuar a integração quando o programa for interrompido.

viii Um arquivo contendo as informações atualizadas periodicamente dos corpos de pequena massa.

ix Um arquivo contendo as informações atualizadas dos parâmetros de integração.

x Um arquivo contendo informações adicionais das outras variáveis do programa.

Os três primeiros arquivos são arquivos de entrada e os arquivos restantes são arquivos de saída. O pacote Mercury pode ser obtido em http://www.arm.ac.uk/~jec/.

3.2. Resultados e Conclusões

Para testar a confiabilidade do integrador numérico Mercury, *Chambers* (1999), realizou uma série de testes onde ele comparou os resultados das integrações numéricas obtidas usando o Mercury e outros integradores:

Estudo da Constante de Jacobi: Para estudar a conservação da Constante de Jacobi (**C**) no Problema Restrito de Três Corpos, Chambers (1999) integrou 36 partículas testes que estavam inicialmente num disco ao redor de um planeta com uma massa similar à massa de Netuno. As partículas possuíam semi-eixo maior a = 36 U.A., excentricidade e=0.18. Os elementos orbitais de Netuno eram semi-eixo a = 30 U.A. e excentricidade e=0. Todos os corpos se moviam no mesmo plano orbital. Os objetos foram integrados por 10^6 anos com τ=5 anos, com tolerância de Bulirsch-Stoer de 10^{-10} e $r_{crit}=10R_{Hill}\sim 7.7$ U.A.. Usando o integrador híbrido Mercury, o erro relativo máximo para C foi de cerca de $3x10^{-6}$ similar ao resultado obtido usando o integrador Bulirsch-Stoer (usando o método Stoermer) com tolerância de 10^{-9}. O integrador Mercury foi cerca de 50% mais rápido do que o integrador Bulirsch-Stoer.

Estudo do problema restrito de três corpos: Integrando as órbitas dos quatro planetas gigantes usando os integradores simpléticos SYMBA [Duncan, Levison & Lee 1998] e Mercury, obtiveram resultados similares para o erro da energia, porém devido ao fato da evolução temporal das órbitas dos planetas ser altamente caótica, a evolução orbital foi diferente nos dois casos.

Estudo da acresção planetária: Uma das utilizações dos integradores híbridos é o estudo do problema de acreção planetária, por isso foram integrados 30 embriões planetários com semi-eixo maior entre 0.5-1.2 U.A., excentricidade entre 0-0.01 e inclinação $i=0^0$. Os corpos foram tratados como pontos de massa e foram integrados por 10000 anos usando dois integradores: o Mercury com τ=5d e o integrador Bulish-Stoer(BS) com tolerância de 10^{-12} e $R_{crit}\sim 0.06$ U.A. Comparando os dois resultados foi verificado que o erro da energia foi o mesmo em ambos os casos.

Referências Bibliográficas

Sanz-Serna,J.M. Symplectic integrators for Hamiltonian problems: an overview. Acta Numerica1, pages 243–286, 1992.

Yoshida H. Recent progress in the theory and application of symplectic integrators . Celestial Mechanics and Dynamical Astronomye, 56:27–43, 1993.

Chambers J.E. A hybrid sympletic integrator that permits close encounters between massive bodies. Mon. Not. R. Astron. Soc., 304:793–799, 1999.