Arquimedes de Siracusa e o seu Método da Exaustão: uma Atividade Didática para o Cálculo de π

Ilydio Pereira de Sá
Universidade Severino Sombra, CECETEN, ilydio@gmail.com

Resumo: *Neste artigo apresenta-se um período da vida e da obra de Arquimedes de Siracusa, as possibilidades da história da Matemática como metodologia de ensino e relata-se uma atividade desenvolvida com alunos de Licenciatura em Matemática de duas instituições de ensino superior: Universidade Severino Sombra e Centro Universitário da Serra dos Órgãos. A atividade, cujo objetivo principal consistia no cálculo do valor aproximado de π, possibilitou aos alunos uma participação ativa – investigando, formulando hipóteses e testando conjecturas –, de forma muito semelhante à ocorrida ao longo do desenvolvimento histórico da Matemática.*

Palavras-chave: *História da matemática. Atividade didática. Método da exaustão.*

Archimedes of Syracuse and his Method of Exhaustion: a Teaching Activity for the Calculation of π

Abstract*: In the article, we focus a little on the life and work of Archimedes of Syracuse, on the possibilities of the History of Mathematics as a teaching methodology and we reported an activity by our students in Mathematics Degree in two Higher Education Institutions: Universidade Severino Sombra and Centro Universitário da Serra dos Órgãos. The event, whose main objective was to calculate the approximate value of π, allowed students to participate actively – investigating, forming hypotheses, testing conjectures –, similarly to what occurred during the historical development of Mathematics.*

Keywords: *History of mathematics. Teaching activity. Method of exhaustion.*

Introdução

Nos currículos oficiais e livros didáticos, a Matemática costuma aparecer como algo que tem resultados – mas não história. A Matemática, no entanto, não consiste em um saber pronto, acabado e o estudo de suas origens e de seu desenvolvimento pode ser bastante interessante, tanto na escola básica quanto no ensino superior.

A motivação para a investigação relatada neste artigo remonta a uma das aulas do curso ministrado pela Escola de Altos Estudos da CAPES, realizado na Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN-SP), em junho de 2011, durante a qual o professor Dr. Ubiratan D'Ambrosio, que a ministrava, mencionou o método usado por Arquimedes para o cálculo de um valor aproximado para π. Imediatamente, lembrei-me de certa atividade exploratória realizada com alunos de Didática da Matemática, na Universidade Severino Sombra (Vassouras), e de História da Matemática, no Centro Universitário da Serra dos Órgãos (Teresópolis), ambas no estado do Rio de Janeiro. Os referidos alunos, que participaram ativamente em ambas as ocasiões, investigaram, formularam hipóteses e testaram conjecturas de forma muito semelhante à ocorrida ao longo do desenvolvimento histórico da Matemática, de forma que o resultado da atividade foi bastante positivo, atendendo aos objetivos dos cursos em questão.

Neste artigo apresenta-se a História da Matemática como o excelente recurso didático que é. Para ilustrá-lo, revisitaremos a vida, o tempo e a obra do famoso matemático, inventor e filósofo grego Arquimedes de Siracusa, concluindo o texto com a exposição da referida atividade didática aplicada em dois cursos de Licenciatura em Matemática.

História da Matemática como Metodologia de Ensino

A legislação educacional brasileira, com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), tem procurado evidenciar a importância da abordagem da História da Matemática como metodologia de ensino. Nas considerações iniciais dos PCNs do Ensino Fundamental, consta que:

> [...] a atividade matemática não é o "olhar para as coisas prontas e definidas", mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade [...] o conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social, e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo (Brasil 2001, p. 19-20).

No campo internacional, há muito se vem discutindo amplamente a História da Matemática como recurso didático. O tema esteve presente na agenda do International Congress in Mathematics Education (ICME), realizado no Japão em 2000, com destaque para as seguintes questões:

- Consequências da utilização da História da Matemática para a organização e a prática pedagógica em classe.
- Utilidade da História da Matemática para pesquisadores em Educação Matemática.
- Incorporação da História da Matemática no currículo.
- Ensino da Matemática, sob as perspectivas heurística, lógica e histórica.

Abordaremos neste artigo o primeiro dos itens supramencionados, exemplificando-o com o método da exaustão de Arquimedes e sua aplicação para o cálculo do valor aproximado de π, no que exaltamos a importância metodológica da História da Matemática e o diálogo desta com outras disciplinas, como Didática da Matemática, Filosofia, História da Ciência, para citar apenas algumas.

Arquimedes de Siracusa, seu Tempo e sua Obra

Arquimedes nasceu em Siracusa, na Sicília, por volta de 287 a.C., filho do astrônomo de nome Fídeas, vindo a ser, segundo a opinião de muitos, o maior matemático de sua época. Suas contribuições para a Matemática, de certa maneira, anteciparam em 2000 anos as ideias do Cálculo de Newton e Leibniz.

Arquimedes, homem profundamente prático, foi também inventor criativo. Entre suas criações podemos citar uma máquina hidráulica para bombeamento de água, conhecida como “parafuso de Arquimedes” (Figura 1). Atualmente, ainda encontramos máquinas e equipamentos nos quais se utilizam as ideias de Arquimedes.

Figura 1. Parafuso de Arquimedes em parque aquático moderno.

É bastante conhecido, também, o episódio que envolve Arquimedes e o rei Hierão. Nessa história, que ficou conhecida como “Arquimedes e a coroa do rei”, Arquimedes descobre um importante princípio de hidrostática referente ao empuxo.

Segundo Boyer (1998), há indícios de que, em sua juventude, Arquimedes tenha estudado com os sucessores de Euclides, na Alexandria. Mesmo que isso não tenha ocorrido, verifica-se, por sua obra, que ele era bastante familiarizado com a Matemática lá desenvolvida.

Mesmo tendo obtido fama por suas invenções mecânicas e máquinas de guerra, como a catapulta (Figura 2), Arquimedes encontrou na Matemática pura sua maior paixão.

Arquimedes foi capaz de aplicar o *método da exaustão*, uma forma primitiva de integração, para obter boa gama de resultados importantes, alguns dos quais chegaram até os dias de hoje. Com seu método, Arquimedes antecipou-se aos modernos métodos do Cálculo Diferencial e Integral, obtendo volumes e áreas de diversas formas geométricas.

Figura 2. Réplica de uma catapulta.

Segundo Sá (2010), Arquimedes foi morto em 212 a.C., durante a captura de Siracusa pelos romanos, na Segunda Guerra Púnica, comandada pelo general Marcelo, que admirava a sua genialidade. Existem algumas versões sobre a sua morte, mas todas parecem concordar que ele foi morto por desobediência a um soldado romano por conta de estar entretido na resolução de algum problema matemático. Nenhuma culpa caberia, portanto, ao general Marcelo, que, em honra a Arquimedes, erigiu um túmulo mostrando a figura de uma esfera inscrita em um cilindro.

A atividade prática apresentada a seguir pode ser replicada em classes da primeira série do ensino médio e consiste na aplicação do método da exaustão para a determinação aproximada de π.

Atividade Prática: **Cálculo do Valor Aproximado do Número Irracional π, Usando o Método da Exaustão de Arquimedes**

> No livro sobre a Medida do Círculo, Arquimedes prova primeiro que a área de um círculo é igual à de um triângulo retângulo tendo por base o comprimento do círculo e por altura o raio. Neste processo ele assume que existe um segmento de reta igual em comprimento à circunferência – uma hipótese condenada por alguns críticos antigos, sob alegação de que não é evidente que uma linha reta possa ser igual a uma curva (Cajori 2007, p. 67).

Sabe-se que Arquimedes usava um método em que inscrevia e circunscrevia polígonos regulares em uma mesma circunferência. É claro que o perímetro da circunferência era sempre maior que o do polígono inscrito e menor que o do polígono circunscrito.

Com essa comparação, Arquimedes, aumentando exaustivamente o número de lados desses polígonos – como se já trabalhasse com limites! –, conseguiu uma boa aproximação para o número π.

Desenvolvimento da Atividade

Tomemos dois polígonos regulares de *n* lados, um inscrito e outro circunscrito em uma mesma circunferência. Representemos por *l* o lado do polígono regular inscrito, por *L* o lado do polígono regular circunscrito e por *R* o raio da circunferência.

A atividade se desenrola segundo a seguinte sequência de passos:

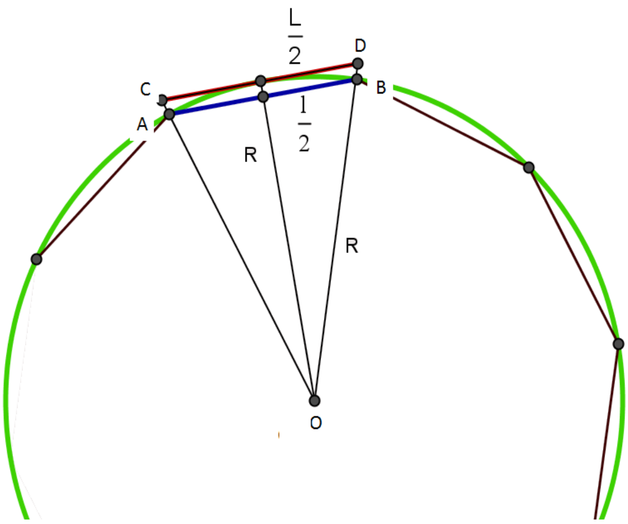


Figura 3. Inscrição e circunscrição de polígonos regulares de *n* lados em uma mesma circunferência.

1) Calculamos o ângulo central α e, ao traçarmos sua bissetriz (que também é mediana e altura do triângulo isósceles formado), obtemos dois triângulos retângulos com um ângulo igual à metade de α.

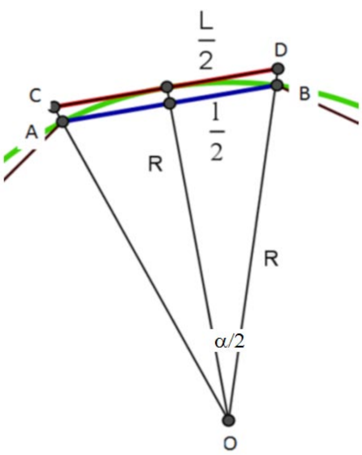
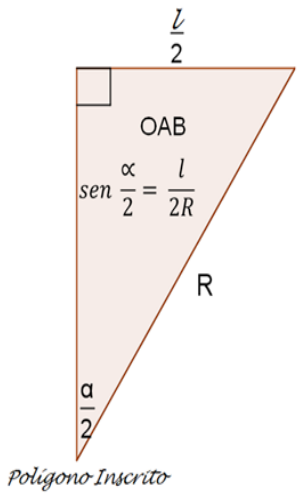


Figura 4. Lados dos polígonos regulares de *n* lados e ângulo central α (um inscrito, lado *l*, e um circunscrito, lado *L*).

2) Usamos relações trigonométricas e calculamos o perímetro do **polígono regular inscrito**.



$$\text{sen}\,\frac{\propto}{2} = \frac{l}{2R} \rightarrow l = 2R.\text{sen}\,\frac{\propto}{2}$$

Como se trata de um polígono regular, seu perímetro será:

$$n\,.\,l = \text{n}\,.2\text{R sen}\,\frac{\propto}{2}\text{, ou}$$

$$\mathbf{2\ n\ R\ .sen\ \frac{\propto}{2}}.$$

3) Procedendo de modo análogo, usando agora o **polígono regular circunscrito**, calculamos:

$$\text{tg}\,\frac{\propto}{2} = \frac{L}{2R} \rightarrow l = 2R.\,\text{tg}\,\frac{\propto}{2}$$

Como também se trata de um polígono regular, seu perímetro será:

$$n\,.\,L = \text{n}\,.2\text{R tg}\,\frac{\propto}{2}\ \text{ou}$$

$$\mathbf{2\ n\ R\ .tg\ \frac{\propto}{2}}\ .$$

4) Como o perímetro da circunferência está compreendido entre o perímetro do polígono regular inscrito e o perímetro do polígono regular circunscrito, escrevemos:

Perímetro. Pol. Inscrito < Perímetro. Circunf. < Perímetro. Pol. Circunscrito

$$2\,n\,R.\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} < 2\,\pi\,R < 2\,n\,R.\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$$

Efetuando as simplificações pertinentes, obtemos:

$$n\,.\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} < \pi < n\,.\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$$

5) Conclusão: Atribuindo-se valores a *n* e calculando-se os valores de *sen* α/2 e *tg* α/2, teremos um método semelhante ao utilizado por Arquimedes, o que nos permite estimar o valor de π. É claro que essa desigualdade gerará valores de π tanto mais precisos quanto maior for o valor de *n* escolhido.

Ao contrário de Arquimedes, que trabalhou com os recursos de que dispunha em sua época, com polígonos de até 96 lados, nossos alunos chegaram a lidar com polígonos de seis mil lados. Houvesse tempo e desejo ou necessidade de fazê-lo, os recursos disponíveis nos dias de hoje (computadores, calculadoras científicas) lhes teriam permitido ir muito além.

Ao desenvolvemos essa atividade com licenciandos de Matemática de duas instituições de ensino superior, compreendemos plenamente o significado das palavras de Mendes et al. (2006) ao vaticinarem:

> [...] sua classe transformar-se-á em um ambiente no qual os estudantes posicionar-se-ão como investigadores preocupados em responder certas questões abertas no contexto da matemática escolar e que poderão ser respondidas a partir da investigação dos aspectos históricos referentes ao problema investigado (Mendes et al. 2001, p. 229).

Analisemos, por curiosidade, os cálculos envolvidos nos casos dos maiores valores de *n* utilizados por Arquimedes e por nossos alunos.

A) Para um polígono regular de 96 lados, teremos:

. Ângulo central α será igual a 360º: 96 = 3,75º, logo, será igual a 1,875º.

. Usando a relação obtida, temos: $n\,.\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} < \pi < n\,.\,tg\,\frac{\alpha}{2}$

O que, nesse caso, acarreta: 96 . sen 1,875º < π < 96 . tg 1,875º.

Consultando uma calculadora ou computador, temos que:

3,14103195... < π < 3,142714599...

O resultado obtido nos dá o valor de π com duas casas decimais de precisão

B) Para um polígono regular de 6.000 lados, teremos:

. Ângulo central α será igual a 360º: 6000 = 0,06º, logo, $\frac{\alpha}{2}$ será igual a 0,03º.

. Usando a mesma relação obtida, teremos:

$$6000 \, . \, \text{sen } 0{,}03^{\circ} < \pi < 6000 \, . \, \text{tg } 0{,}03^{\circ}.$$

Novamente, consultando uma calculadora, teremos:

$$3{,}14159251004 \ldots < \pi < 3{,}14159294068\ldots$$

Nesse caso, conseguimos calcular o valor de π com exatidão até a sua sexta casa decimal (a saber, o valor de π com exatidão, até sua 23ª casa decimal, é 3,14159265358979323846264...)

Basta aos interessados, ampliando a proeza de Arquimedes, aumentar ainda mais o número de lados do polígono e verificar até que casa decimal conseguirá chegar. Bom trabalho!

Conclusão

Com este artigo, tive o propósito de induzir a algumas reflexões sobre a importância do uso da História da Matemática como metodologia de ensino. Sob esse aspecto, procurei estabelecer uma interação entre História da Matemática, Didática da Matemática e Prática de Ensino de Matemática, três das disciplinas que tenho lecionado em cursos de Licenciatura em Matemática no estado do Rio de Janeiro.

Objetivei exemplificar o uso da História da Matemática não apenas como o elemento motivador que decerto é, mas como recurso didático que favoreça, em nossos alunos, a compreensão da *construção do conhecimento* ao longo dos tempos.

A esperança é que a utilização da História da Matemática por professores que a tenham vivenciado sob uma perspectiva metodológica e crítica ajude a formar alunos que não tenham o célebre “medo da matemática”, enxergando-a de uma ótica positiva e construtiva para o indivíduo e a sociedade.

Referências

Boyer, C.B. (1998). História da matemática, Edgard Blücher.

Brasil (2001). Parâmetros curriculares nacionais: matemática, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental, 3.ª edição.

Cajori, F. (2007). Uma história da matemática, Ciência Moderna.

Mendes, I.A., Fossa, J.A., Valdés, J.E.N. (2006). A história como um agente de cognição na educação matemática, Sulina.

Sá, I.P. de (2010). A magia da matemática: atividades investigativas, curiosidades e histórias da matemática, Ciência Moderna, 3.ª edição.